CE085 - Estatística Inferencial
Testes de hipóteses

Prof. Wagner Hugo Bonat

Laboratório de Estatística e Geoinformação - LEG
Curso de Bacharelado em Estatatística
Universidade Federal do Paraná - UFPR

16 de outubro de 2018

Conteúdo

Conteúdo

- Motivação e definições.
- Teste da Razão de verossimilhança.
- Teste de Wald.
- Teste escore.

Definições

- Chamamos de **hipótese estatística** qualquer afirmação acerca da distribuição de probabilidade de uma ou mais v.a.
- Chamamos de **teste de uma hipótese estatística** a função de decisão $\chi \to \{a_0, a_1\}$, em que a_0 corresponde à ação de considerar a hipótese H_0 verdadeira e a_1 corresponde à ação de considerar H_0 como falsa.
- χ denota o espaço amostra.
- A função de decisão d divide χ em dois conjuntos

$$A_0 = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \chi; d(y_1, \ldots, y_n) = a_0\}$$

e

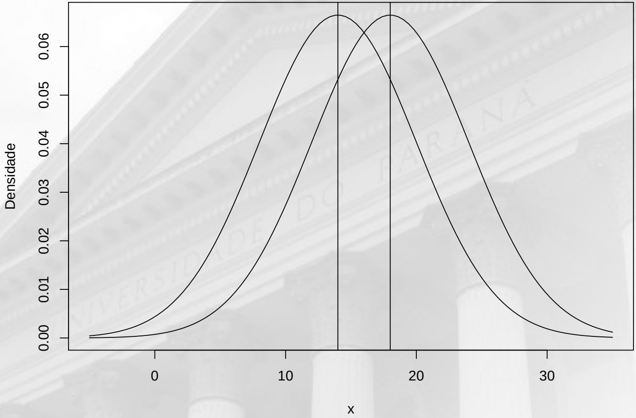
$$A_1 = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \chi; d(y_1, \ldots, y_n) = a_1\},$$

onde $A_0 \cup A_1 = \chi$ e $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.

Exemplo 1

- Suponha que, entre pessoas sadias, a concentração de certa substância no sangue se comporta segundo um modelo Normal com média 14 unidades/ml e desvio padrão 6 unidades/ml. Pessoas sofrendo de uma doença específica êm concentração méda da substância alterada para 18 unidades/ml. Admitimos que o modelo Normal com desvio padrão 6 unidades/ml, continua representado de forma adequada a concentração da substância em pessoas com a doença.

Exemplo 8.1



Exemplo 1

- Interesse geral $\mu = 14$?
- Distribuição da média amostral $N(\mu, 36/30)$.
- Critério para decidir sobre o valor de μ.
- Valor crítico, digamos x_c tal que se a média for maior que x_c concluímos que a amostra pertence a população com média 18.
- Erros associados.

Tipos de Hipóteses

- Hipótese simples:
  H_0 : O tratamento não é eficaz ($\mu = 18$);
  H_1 : O tratamento é eficaz ($\mu = 14$).
- Hipótese unilateral:
  H_0 : O tratamento não é eficaz ($\mu = 18$);
  H_1 : O tratamento é eficaz ($\mu < 18$).
- Hipótese bilateral:
  H_0 : O tratamento não é eficaz ($\mu = 18$);
  H_1 : O tratamento é eficaz ($\mu \neq 18$).

Erros ao realizar um teste de hipótese

- Erro Tipo I: rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira.
- Erro Tipo II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa.

		Situação	
		H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Decisão	Rejeitar H_0	Erro Tipo I	Sem erro
	Não rejeitar H_0	Sem error	Erro Tipo II

- $\alpha =$ P(erro tipo I) $=$ P(rejeitar $H_0 - H_0$ verdadeira);
- $\beta =$ P(error tipo II) $=$ P(não rejeitar $H_0 - H_0$ falsa).
- $\alpha =$ P(concluir que o tratamento é eficaz quando na verdade não é);
- $\beta =$ P(concluir que o tratamento não é eficaz quando na verdade ele é).

Valor crítico

- α é chamado nível de significância do teste.
- Suponha que $n = 30$ observação e a média amostral é $\bar{X}$.
- Supondo α conhecido podemos determinar o valor crítico x_c.

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} \quad H_0 | H_0 \quad \text{Verdadeira})$$

$$= P(\bar{X} < x_c | \mu = 18) = P(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}})$$

$$= P(Z < z_c)$$

com $Z \sim N(0, 1)$.

Obtendo o valor crítico

- Dado α encontramos z_c na Tabela normal padrão.
- Obtemos x_c

$$z_c = \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}} \rightarrow x_c = 18 + z_c \frac{6}{\sqrt{30}}.$$

- Supondo $\alpha = 0.05$ temos

$$0.05 = P(Z < z_c) \rightarrow z_c = -1.64;$$

logo

$$x_c = 18 - 1.64 \frac{6}{\sqrt{30}} = 16.20.$$

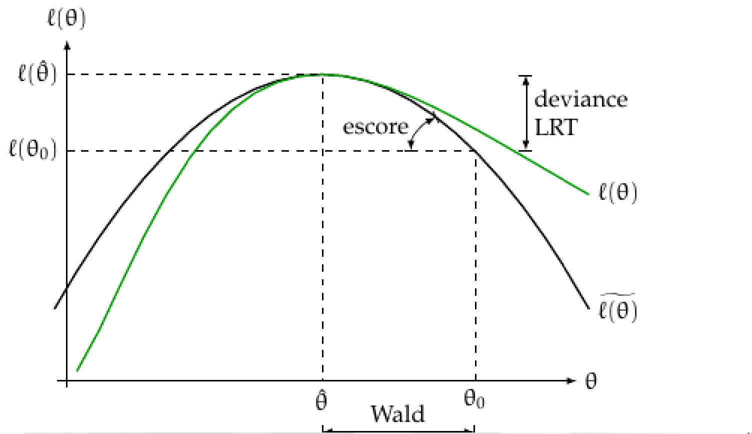
Regiões de aceitação e rejeição

- Região crítica ou região de rejeição

$$RC = \{x \in \Re : x < 16.20\}.$$

- Região de aceitação (RA) é o complemento de RC.

Tipos de Teste de hipóteses



Teste da razão de verossimilhança

- Teste da razão de verossimilhança para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$ é

$$\lambda(\underline{y}) = \frac{sup_{\Theta_0} L(\theta|\underline{y})}{sup_{\Theta} L(\theta|\underline{y})}.$$

- O teste da razão de verossimilhança (TRV) é qualquer teste que tenha uma região de rejeição da forma $\underline{y} : \lambda(\underline{y}) \leq c$ onde c é qualquer número que satisfaça $0 \leq c \leq 1$.
- Para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$, suponha $Y_1, \ldots, Y_n$ sejam iid $f(\underline{y}|\theta)$, $\hat{\theta}$ seja o EMV de θ, e $f(\underline{y}|\theta)$ satisfaça as condições de regularidade. Assim, sob H_0 a medida que $n \to \infty$

$$-2 \log \lambda(\underline{y}) \to \chi^2_1.$$

Teste Wald

- Hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- Estatística de teste Wald

$$\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} \sim N(0, 1).$$

- $V(\hat{\theta})$ é a variância do estimador $\hat{\theta}$.

Teste escore

- A função escore é definida como

$$U(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta|\underline{Y}).$$

- Sabemos que para todo θ, $E(U(\theta)) = 0$.
- $H_0 : \theta = \theta_0$ e se H_0 for verdadeira, então $U(\theta)$ tem média 0. Além disso,

$$V_\theta(U(\theta)) = -E_\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta|\underline{Y}) \right) = I_E(\theta).$$

- A estatística de teste para o teste de escore é

$$Z_S = \frac{U(\theta_0)}{\sqrt{I_E(\theta_0)}} \sim N(0, 1).$$