1 Aula 12/4

Teste de hipóteses via fator de Bayes

Considere o teste de hipóteses $\mathrm{H}_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $\mathrm{H}_1 : \theta \in \Theta_1$. O fator de Bayes (FB) é definido como a razão entre as probabilidades a posteriori de H_0 sobre H_1 e as probabilidades a priori de H_0 e H_1, ou seja

$$\lambda_B = \left(\frac{P(\mathrm{H}_0|X)}{P(\mathrm{H}_1|X)}\right) \Big/ \left(\frac{P(\mathrm{H}_0)}{P(\mathrm{H}_1)}\right) \ . \tag{1}$$

Caso especial 1 Suponha o teste $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ versus $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1$, e note que

$$P(\mathrm{H}_0|X) \propto P(X|\mathrm{H}_0)P(\mathrm{H}_0),$$
$$P(\mathrm{H}_1|X) \propto P(X|\mathrm{H}_1)P(\mathrm{H}_1).$$

Daí, temos

$$\lambda_B = \frac{P(X|\mathrm{H}_0)P(\mathrm{H}_0)}{P(X|\mathrm{H}_1)P(\mathrm{H}_1)}\frac{P(\mathrm{H}_1)}{P(\mathrm{H}_0)},$$

com $P(\mathrm{H}_0), P(\mathrm{H}_1) > 0$, segue que

$$\lambda_B = \frac{P(X|\mathrm{H}_0)}{P(X|\mathrm{H}_1)}.$$

Ou seja, sob hipóteses simples, o FB coincide com o teste da razão de verossimilhança.

Interpretação A definição do Fator de Bayes sugere que, se $\lambda_B > 1$, então H_0 é preferível. Em particular, Jeffreys (1961) construiu a seguinte escala de evidência empírica, independente de uma regra de decisão, em favor de H_0:

- Se $\log_{10}(\lambda_B) \in [0\,;\,0,5)$, a evidência em favor de H_0 é fraca;
- Se $\log_{10}(\lambda_B) \in [0,5\,;\,1)$, a evidência em favor de H_0 é razoável;
- Se $\log_{10}(\lambda_B) \in [1\,;\,2)$, a evidência em favor de H_0 é forte;
- Se $\log_{10}(\lambda_B) \in [2\,;\,+\infty)$, a evidência em favor de H_0 é conclusiva.

Logo, o procedimento de testar hipóteses se limita a calcular λ_B e classificar a tomada de decisão com base nessa relação empírica.

Caso especial 2 Considere o cenário onde θ é contínuo e tem-se o interesse em testar $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ versus $\mathrm{H}_1 : \theta \neq \theta_0$. Como θ é contínuo, os modelos (a priori) usuais irão atribuir probabilidade zero ao evento $\{\theta = \theta_0\}$; o que invalida os cálculos anteriores. Existem formas de contornar essa questão, uma delas é atribuir uma massa de probabilidade positiva (a priori) ao ponto $\theta = \theta_0$, is to é, assumir que

$$\pi(\theta) = pI_{\{\theta_0\}}(\theta) + (1-p)\pi^*(\theta)I_{\{\theta \neq \theta_0\}}(\theta).$$

Essa particular atribuição é base para algumas extensões do FB.

Estimação Intervalar

Definição: Seja $\theta \in \Theta$. Uma região $\mathcal{C} \subset \Theta$ é uma região $100(1-\alpha)\%$ de credibilidade para θ, se $P(\theta \in \mathcal{C}|X) \geq 1-\alpha$.

Lê-se **probabilidade** de θ pertencer ao conjunto $\mathcal{C}$.

Similar ao contexto clássico, existem diversas formas de especificar um intervalo de $100(1-\alpha)\%$ credibilidade. As três formas mais usuais, são:

1. Unilateral (a direita ou a esquerda)

2. Simétrica

3. Highest probability density (HPD) – ou Highest density interval (HDI): **Definição** Um intervalo $100(1-\alpha)\%$ de credibilidade para θ é HPD para θ, quando $\mathcal{C} = \{\theta \in \Theta : P(\theta|X) \geq k(\alpha)\}$ onde $k(\alpha)$ é a maior constante tal que $P(\theta \in \mathcal{C}|X) \geq 1-\alpha$.

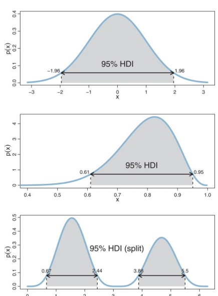

Figure 1: Exemplos de intervalos HPD.

Note que, se a distribuição a posteriori é simétrica e unimodal, então o intervalo HPD coincide com o intervalo simétrico.