

# Definição de prioris e resumo da posteriori

Fernando Mayer  
2019-09-05

# Análise bayesiana de dados

A análise de dados sob a perspectiva Bayesiana resume-se à 3 etapas:

1. Definir a distribuição *à priori*
  - Informativa
  - Não informativa
2. Definir a função de verossimilhança
3. Encontrar a distribuição posterior
  - Famílias conjugadas
  - Simulação estocástica

**Todo processo de inferência será baseado na distribuição posterior**

# Distribuições posteriores

## Famílias conjugadas

- As **famílias conjugadas** podem ser utilizadas quando o produto  $\pi(\theta) \cdot f(\mathbf{x}|\theta)$  possui **forma fechada**, ou seja, resulta em uma distribuição conhecida
- Portanto, a posterior é obtida diretamente pelo teorema de Bayes
  - $\uparrow$  Resultado simples e conveniente
  - $\downarrow$  Restringe a escolha das distribuições *priori* e de verossimilhança

### Definição: família conjugada

Seja  $\mathcal{F}$  uma família de distribuições para a verossimilhança  $f(\mathbf{x}|\theta)$ , e  $\mathcal{P}$  uma família de distribuição para a *priori*  $\pi(\theta)$ . Dizemos que  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{P}$  são **famílias conjugadas** de distribuições se a distribuição posterior  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  também for um membro de  $\mathcal{P}$ .

# Distribuições posteriores

## Famílias conjugadas

Exemplo: Beta-binomial com  $\pi(\theta) \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  e  $f(\mathbf{x}|\theta) \sim \text{Bin}(n, \theta)$

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\mathbf{x}) &\propto \pi(\theta) \cdot f(\mathbf{x}|\theta) \\ &\propto \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} \cdot \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \\ &\propto \theta^{\alpha+x-1} (1 - \theta)^{\beta+n-x-1}\end{aligned}$$

Portanto,  $\pi(\theta|\mathbf{x}) \sim \text{Beta}(\alpha^* = \alpha + x, \beta^* = \beta + n - x)$

# Distribuições posteriores

## Simulação estocástica

- A **simulação estocástica** é necessária quando o produto  $\pi(\theta) \cdot f(\mathbf{x}|\theta)$  não possui forma fechada, e resulta em uma distribuição desconhecida
- Portanto é necessário realizar um processo de simulação para se construir a posterior
  - $\uparrow$  Aplicação não se restringe apenas às famílias conjugadas
  - $\downarrow$  O processo de simulação pode ser muito "caro" computacionalmente
- Alguns métodos de simulação:
  - Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)
  - Re-amostragem por importância
- Outros: *Integrated Nested Laplace Approximation* - INLA

# Distribuições posteriores

Independente de como a posterior foi obtida:

- É um compromisso entre a *priori* (que carrega o **conhecimento prévio**), e a verossimilhança (que expressa o **conhecimento atual** adquirido com o experimento realizado)
- Representa todo o conhecimento existente sobre o problema, portanto a inferência Bayesiana é baseada nesta distribuição

■ "A posterior de hoje é a *priori* de amanhã"

# Inferência

## Abordagem clássica

- $\theta$  é uma quantidade **desconhecida**, mas **fixa**
- Uma amostra aleatória  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é obtida a partir de uma população indexada por  $\theta$
- Com base nos valores observados na amostra, o conhecimento sobre  $\theta$  é obtido

## Abordagem Bayesiana

- $\theta$  é uma quantidade **desconhecida**, e **aleatória**
- A variabilidade em  $\theta$  é expressa pela *priori*  $\pi(\theta)$
- Uma amostra aleatória  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é obtida a partir de uma população indexada por  $\theta$
- A distribuição **a priori** é **atualizada** com essa informação da amostra, representada pela verossimilhança  $f(\mathbf{x}|\theta)$

# Estimação por intervalo

## Abordagem clássica

- Dizemos que o intervalo aleatório  $(T_1, T_2)$ ,  $T_1(\mathbf{X}) \leq T_2(\mathbf{X})$ , é um **intervalo de confiança** para  $\theta$ , com coeficiente de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$ , ( $0 < \alpha < 1$ ), se

$$P[T_1 < \theta < T_2] = \gamma$$

- Notação:

$$IC(\theta, \gamma\%) = (T_1, T_2)$$

- O intervalo **contém**  $\theta$  com probabilidade  $\gamma$
- Uma vez que o parâmetro é fixo, o intervalo é aleatório
- $\theta \in (T_1, T_2)$  com probabilidade 0 ou 1

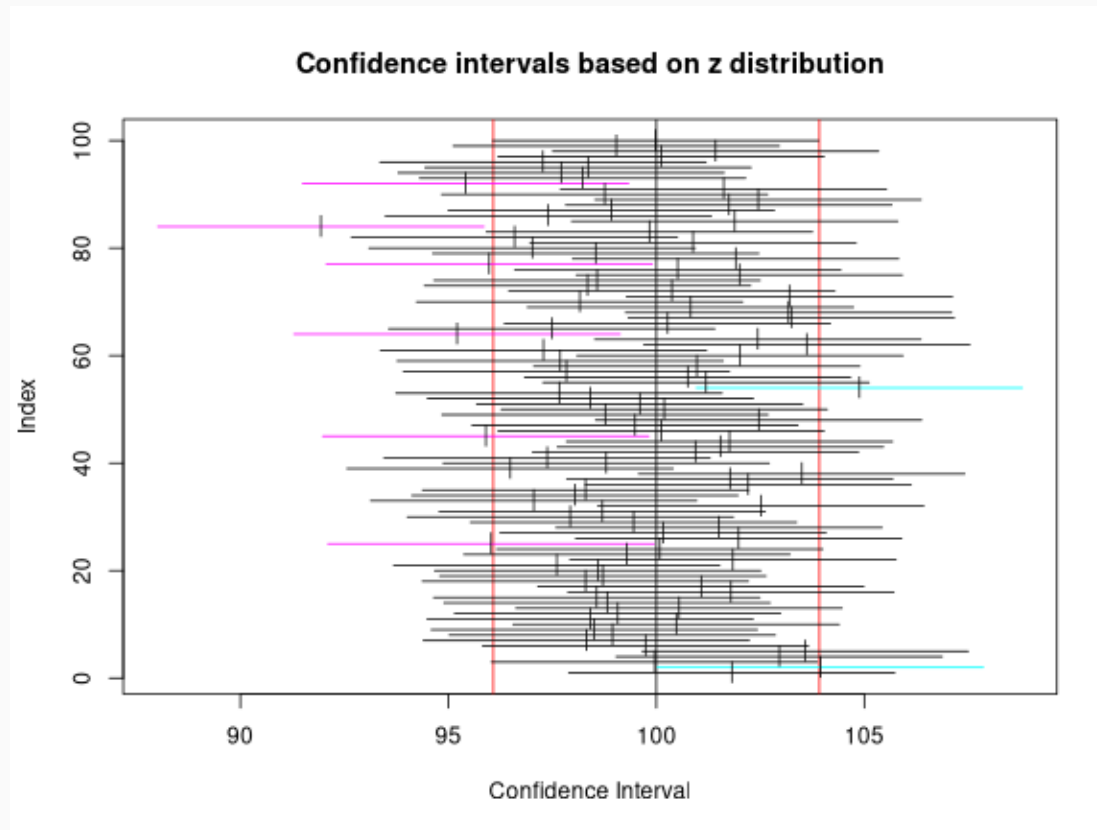


# Estimação por intervalo

## Abordagem clássica

Visualização de 100 intervalos de confiança

```
require(TeachingDemos)  
ci.examp(reps = 100)
```



# Estimação por intervalo

## Abordagem Bayesiana

- Chamamos de **intervalo de credibilidade** de  $\gamma = 1 - \alpha$ , ( $0 < \alpha < 1$ ), o intervalo delimitado pelos percentis  $[\alpha/2]$  e  $[1 - (\alpha/2)]$

$$(\theta_{[\alpha/2]}, \theta_{[1-(\alpha/2)]})$$

da distribuição posterior  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  para  $\theta$ .

- De maneira mais geral, dizemos que  $(T_1, T_2)$ ,  $T_1 = \theta_{[\alpha/2]}$  e  $T_2 = \theta_{[1-(\alpha/2)]}$ , é um intervalo de credibilidade para  $\theta$  com coeficiente de confiança  $\gamma$  se

$$\int_{T_1}^{T_2} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta = \gamma$$

- Notação:

$$\text{ICr}(\theta, \gamma\%) = (\theta_{[\alpha/2]}, \theta_{[1-(\alpha/2)]})$$

- Um **intervalo de credibilidade** é então o intervalo de valores mais prováveis de  $\theta$ , que soma probabilidade  $\gamma$
- $\theta \in (\theta_{[\alpha/2]}, \theta_{[1-(\alpha/2)]})$  com probabilidade  $\gamma$

# Estimação por intervalo

## Interpretação

- **Abordagem clássica:** Temos  $\gamma\%$  de confiança de que o intervalo contém  $\theta$ .
- **Abordagem Bayesiana:** Temos  $\gamma\%$  de confiança de que  $\theta$  pertence a esse intervalo.

# Estimação por intervalo

## Exemplo (Kinas e Andrade, 2010)

**Interesse:** média de baleias avistadas em 10 milhas náuticas (MN)

- Em 150 MN navegadas foram realizadas 10 avistagens
- Obter a distribuição posterior  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  para o número médio de baleias avistadas

Caracterização do problema:

$x \equiv$  número de avistagens = 10

$n \equiv$  número de unidades amostradas =  $150/10 = 15$

$\theta \equiv$  número médio de avistagens/10 MN

```
# Número de avistagens
x <- 10
# Unidades amostradas
n <- 15
# Possíveis valores para teta (numero médio de avistagens)
teta <- seq(0, 2, length = 200)
```

# Estimação por intervalo

## Exemplo

Suposições do problema:

$$f(\mathbf{x}|\theta) \sim \text{Poisson}(n\theta)$$

$$\pi(\theta) \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$$

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \sim ?$$

Posterior conjugada para  $\pi(\theta) \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$  e  $f(\mathbf{x}|\theta) \sim \text{Poisson}(n\theta)$ :

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\mathbf{x}) &\propto \pi(\theta) \cdot f(\mathbf{x}|\theta) \\ &\propto \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \cdot \frac{n^x}{x!} \theta^x e^{-n\theta} \\ &\propto \theta^{\alpha+x-1} e^{-\theta(\beta+n)}\end{aligned}$$

Portanto

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \sim \text{Gama}(\alpha^* = \alpha + x, \beta^* = \beta + n)$$

# Estimação por intervalo

Considerando que não existe nenhuma informação prévia sobre  $\theta$ , vamos assumir que  $\pi(\theta)$  é uma *priori* não informativa, por exemplo  $\theta \sim \text{Gama}(\alpha = 1, \beta = 0.1)$

```
alfa <- 1
beta <- 0.1
## Calcula a densidade da priori
priori.ni <- dgamma(teta, alfa, beta)
```

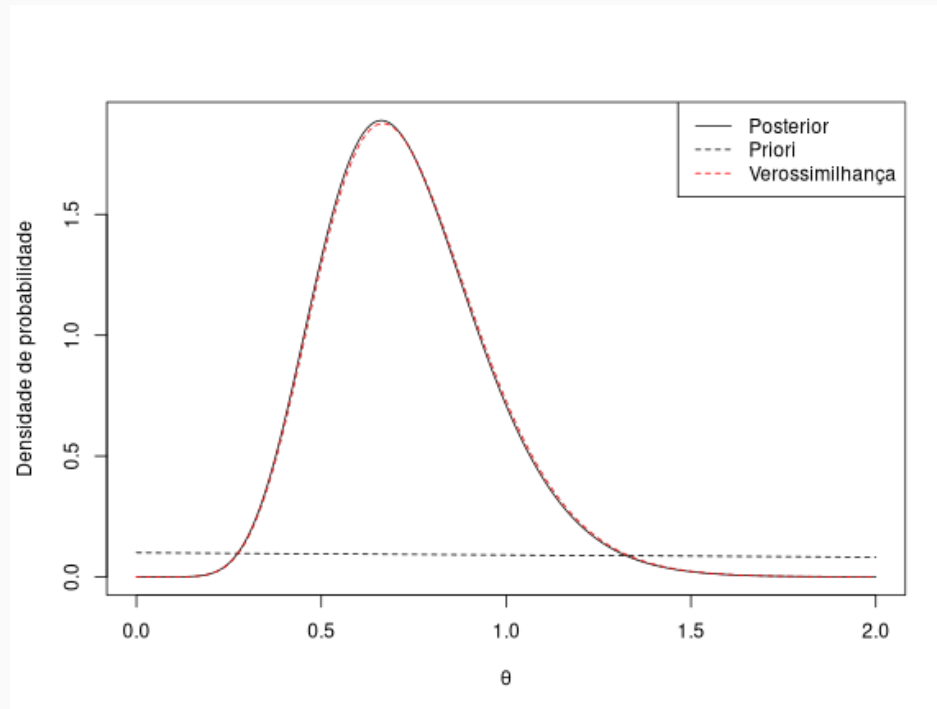
Assim, os parâmetros da posterior  $\pi(\theta|\mathbf{x}) \sim \text{Gama}(\alpha^* = \alpha + x, \beta^* = \beta + n)$

```
(alfa.star <- alfa + x)
# [1] 11
(beta.star <- beta + n)
# [1] 15.1
```

# Estimação por intervalo

Cálculo da densidade da posterior com os novos parâmetros

```
post.ni <- dgamma(teta, alfa.star, beta.star)
plot(teta, post.ni, type = "l", xlab = expression(theta),
     ylab = "Densidade de probabilidade")
lines(teta, priori.ni, lty = 2)
lines(teta, dgamma(teta, 1 + x, n), col = 2, lty = 2)
legend("topright", lty = c(1, 2, 2), col = c(1, 1, 2),
     legend = c("Posterior", "Priori", "Verossimilhança"))
```



# Estimação por intervalo

A partir da posterior  $Gama(\alpha^*, \beta^*)$ , podemos encontrar um **intervalo de credibilidade** de  $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95 = 95\%$ , onde os intervalos serão delimitados pelos percentis

$$(\theta_{[0.025]}, \theta_{[0.975]})$$

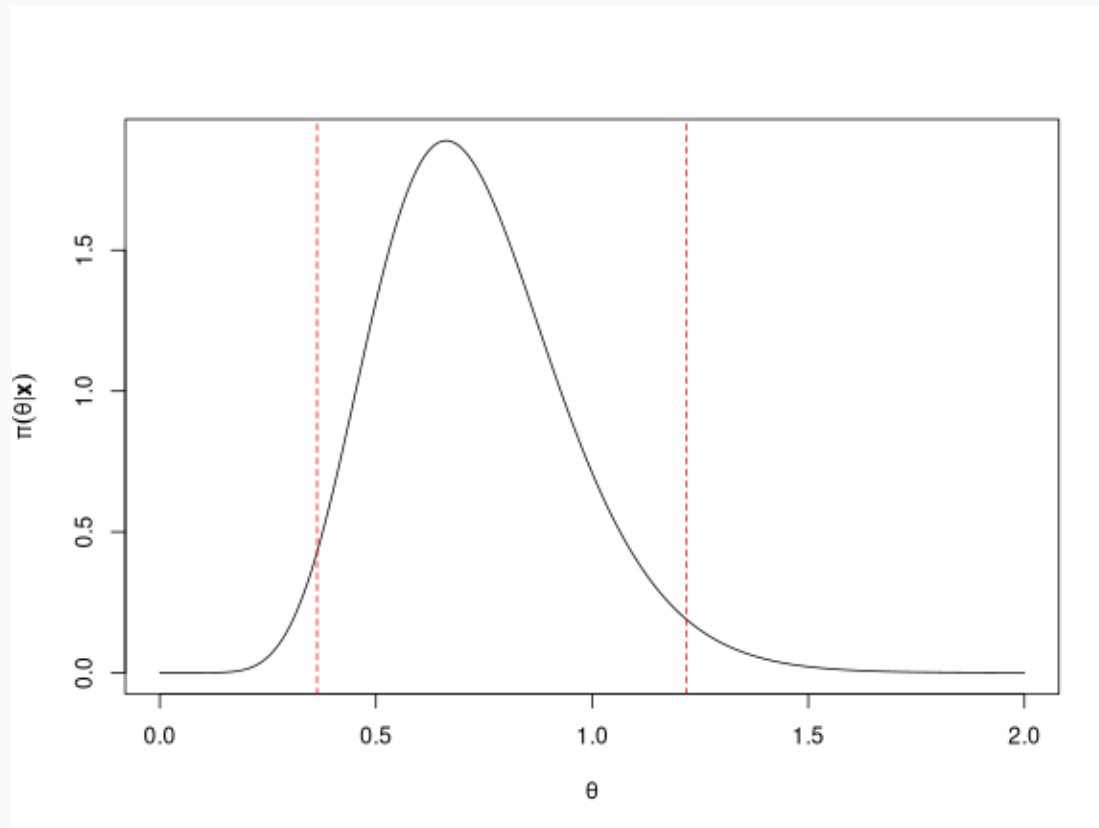
da posterior  $\pi(\theta|\mathbf{x})$

```
qgamma(c(0.025, 0.975), alfa.star, beta.star)
# [1] 0.363653 1.217904
```



# Estimação por intervalo

```
## Gráfico da posterior com intervalo de credibilidade  
plot(teta, post.ni, type = "l", xlab = expression(theta),  
      ylab = expression(pi(paste(theta, "|", bold(x))))  
abline(v = qgamma(c(0.025, 0.975), alfa.star, beta.star),  
       lty = 2, col = 2)
```



# Estimação por intervalo

Considere que artigos científicos indicam que na região de estudo deve-se esperar uma média de 0.45 avistagens/10 MN. Podemos utilizar essa informação como uma *priori* **informativa**.

- Igualando essa informação à esperança da Gama:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = 0.45 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{0.45}$$

- Como a *priori* deve ser informativa, podemos assumir um valor relativamente alto para  $\alpha$ , p.ex.  $\alpha = 4.5$

$$\beta = \frac{\alpha}{0.45} = \frac{4.5}{0.45} = 10$$

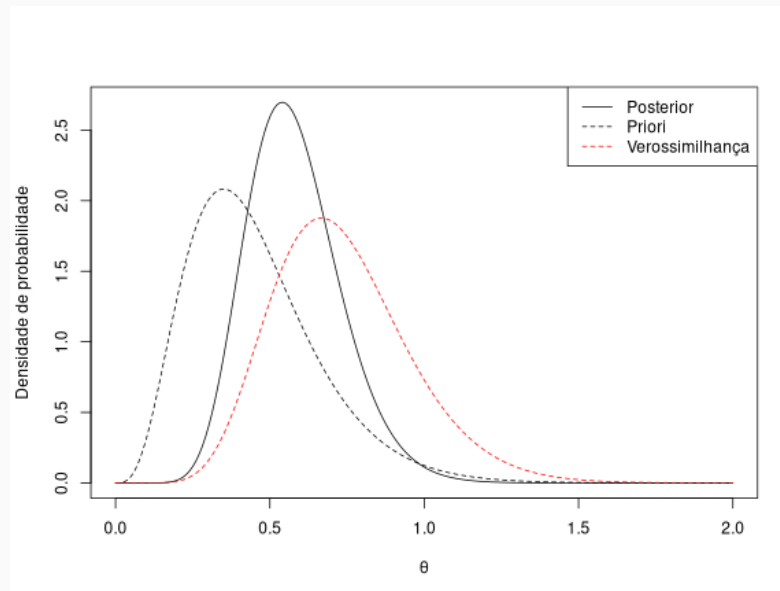
- Portanto ficamos com uma *priori* informativa  $\pi(\theta) \sim \text{Gama}(\alpha = 4.5, \beta = 10)$

```
alfa.i <- 4.5
beta.i <- 10
## Calcula a densidade da priori
priori.i <- dgamma(teta, alfa.i, beta.i)
```

# Estimação por intervalo

A posterior  $\pi(\theta|\mathbf{x}) \sim \text{Gama}(\alpha^* = \alpha + x, \beta^* = \beta + n)$

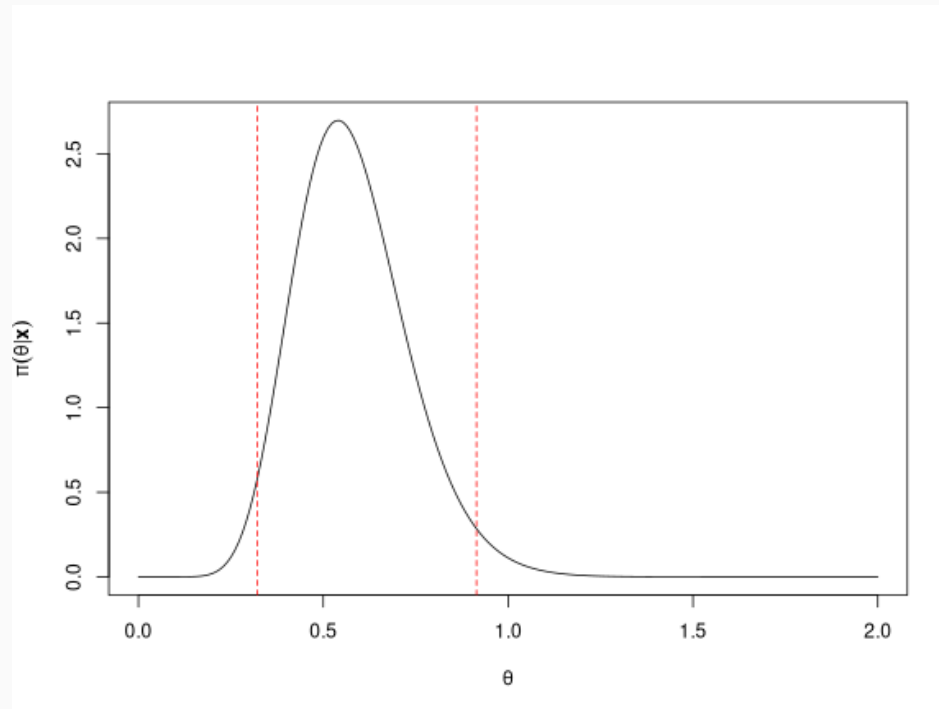
```
alfa.star.i <- alfa.i + x
beta.star.i <- beta.i + n
## Cálculo da densidade da posterior com a priori informativa
post.i <- dgamma(teta, alfa.star.i, beta.star.i)
# Visualização
plot(teta, post.i, type = "l", xlab = expression(theta),
     ylab = "Densidade de probabilidade")
lines(teta, priori.i, lty = 2)
lines(teta, dgamma(teta, 1 + x, n), col = 2, lty = 2)
legend("topright", lty = c(1, 2, 2), col = c(1, 1, 2),
     legend = c("Posterior", "Priori", "Verossimilhança"))
```



# Estimação por intervalo

Podemos encontrar o **intervalo de credibilidade**

```
qgamma(c(0.025, 0.975), alfa.star.i, beta.star.i)
# [1] 0.3209414 0.9144457
## Gráfico da posterior com intervalo de credibilidade
plot(teta, post.i, type = "l", xlab = expression(theta),
      ylab = expression(pi(paste(theta, "|", bold(x)))))
abline(v = qgamma(c(0.025, 0.975), alfa.star.i, beta.star.i),
       lty = 2, col = 2)
```



# Estimação por intervalo

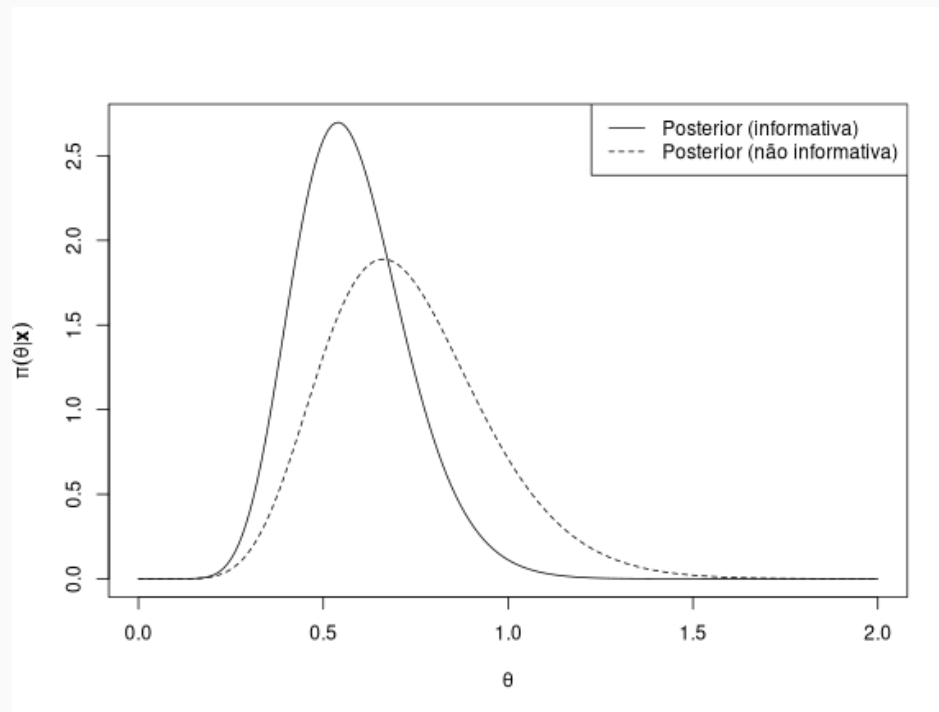
Um resumo simples das duas posteriores obtidas

```
## Inferência com a priori não informativa
qgamma(c(.025, .5, .975), alfa.star, beta.star)
# [1] 0.3636530 0.7065247 1.2179044
## Inferência com a priori informativa
qgamma(c(.025, .5, .975), alfa.star.i, beta.star.i)
# [1] 0.3209414 0.5667225 0.9144457
```

# Estimação por intervalo

Comparação das duas posteriores

```
plot(teta, post.i, type = "l", xlab = expression(theta),  
     ylab = expression(pi(paste(theta, "|", bold(x))))  
lines(teta, post.ni, lty = 2)  
legend("topright",  
       legend = c("Posterior (informativa)",  
                  "Posterior (não informativa)"), lty = c(1,2))
```



# Outro exemplo

Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma a.a. de uma distribuição normal de média  $\mu$  conhecida e variância  $\sigma^2$  desconhecida. Considere a priori  $[\sigma^2] \propto 1/\sigma^2$ .

1. Obtenha a expressão da verossimilhança do modelo.
2. Obtenha a expressão da distribuição a posteriori.
3. É possível identificar a posteriori do modelo como alguma distribuição conhecida?
4. Considere que foi tomada a amostra dada pelos valores a seguir, e que  $\mu = 10$ . Obtenha a expressão da posteriori.

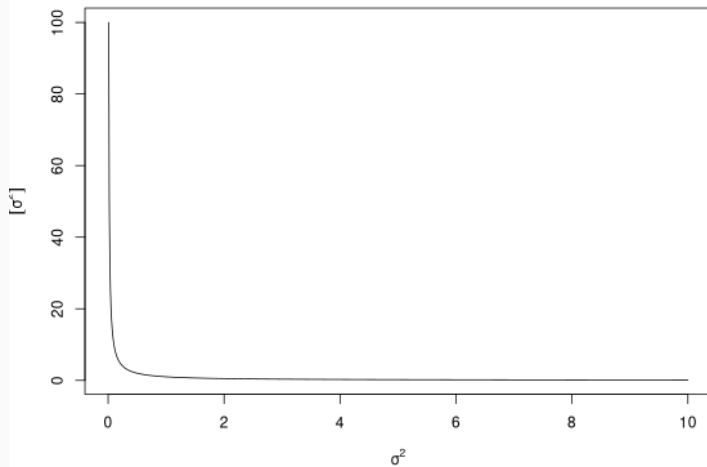
# [1] 12.1 8.7 11.3 9.2 10.5 9.7 11.6

1. Indique (com comandos do R ou de alguma outra forma) como resumos pontuais e intervalares desta distribuição a posteriori poderiam ser obtidos para fins de inferência

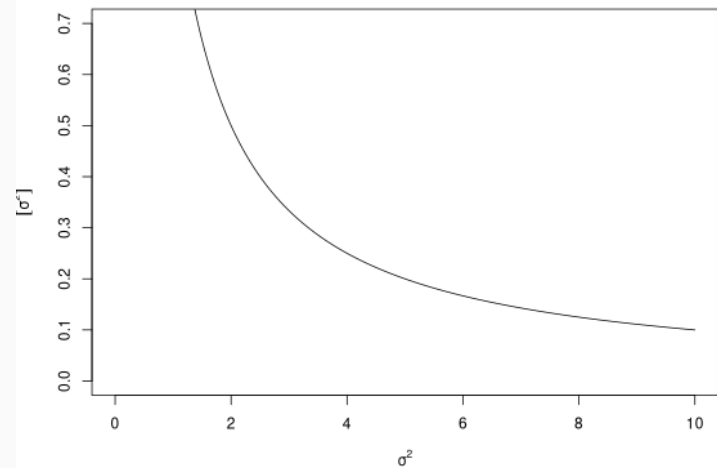
# Priori de Jeffreys

O que significa  $[\sigma^2] \propto 1/\sigma^2$ ?

```
x <- seq(0, 10, 0.01)
fx <- 1/x
plot(x, fx, type = "l",
      xlab = expression(sigma^2),
      ylab = expression(group("[", past
```



```
x <- seq(0, 10, 0.01)
fx <- 1/x
plot(x, fx, type = "l",
      xlab = expression(sigma^2),
      ylim = c(0, 0.7),
      ylab = expression(group("[", past
```





# 1. Expressão da verossimilhança

As funções de verossimilhança  $L(\sigma^2)$ , log-verossimilhança  $l(\sigma^2)$ , escore  $U(\sigma^2)$  e hessiana  $H(\sigma^2)$  são dadas por:

$$\begin{aligned}L(\sigma^2; y) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mu)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2\right\}\end{aligned}$$

$$l(\sigma^2; y) = \log\{L(\sigma^2; y)\} = (-n/2) \left[ \log(2\pi) + \log(\sigma^2) + \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{n} (\sigma^2)^{-1} \right]$$

$$U(\sigma^2) = \frac{dl(\sigma^2; y)}{d\sigma^2} = (-n/2) \left[ (\sigma^2)^{-1} - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{n} (\sigma^2)^{-2} \right]$$

$$H(\sigma^2) = \frac{d^2l(\sigma^2; y)}{d(\sigma^2)^2} = (-n/2) \left[ -(\sigma^2)^{-2} + \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{n} (\sigma^2)^{-3} \right]$$

## 2. Expressão da distribuição posterior

A expressão da distribuição a posteriori é obtida da forma:

$$\begin{aligned} [\sigma^2 | y] &\propto [\sigma^2] \cdot L(\sigma^2; y) \\ &= (\sigma^2)^{-1} \cdot (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-(n/2)-1} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

É possível identificar esta posteriori como alguma distribuição conhecida?

# 3. Identificar a posteriori como alguma distribuição conhecida

Posterior:

$$[\sigma^2 | \mathbf{y}] \propto (\sigma^2)^{-(n/2)-1} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp -x/\beta \mathbb{I}_{x \geq 0}$$

$$E[X] = \alpha\beta \quad \text{Var}[X] = \alpha\beta^2$$

$X \sim \text{IGama}(\alpha, \beta)$

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} \exp -1/(\beta x) \mathbb{I}_{x \geq 0}$$

$$E[X] = \frac{1}{\beta(\alpha - 1)} \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\beta^2(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$$

### 3. Identificar a posteriori como alguma distribuição conhecida

A expressão

$$[\sigma^2 | \mathbf{y}] \propto (\sigma^2)^{-(n/2)-1} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

vista como uma função de  $\sigma^2$ , corresponde ao núcleo de uma densidade *gama inversa* de parâmetros:

$$\alpha = \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}$$

Esta distribuição também é chamada na literatura de *qui-quadrado inversa escalonada*.

## 4. Expressão da posteriori para os dados

Para o conjunto de dados temos que

$$\alpha = \frac{n}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2} = \frac{2}{11,33} = 0,1765$$

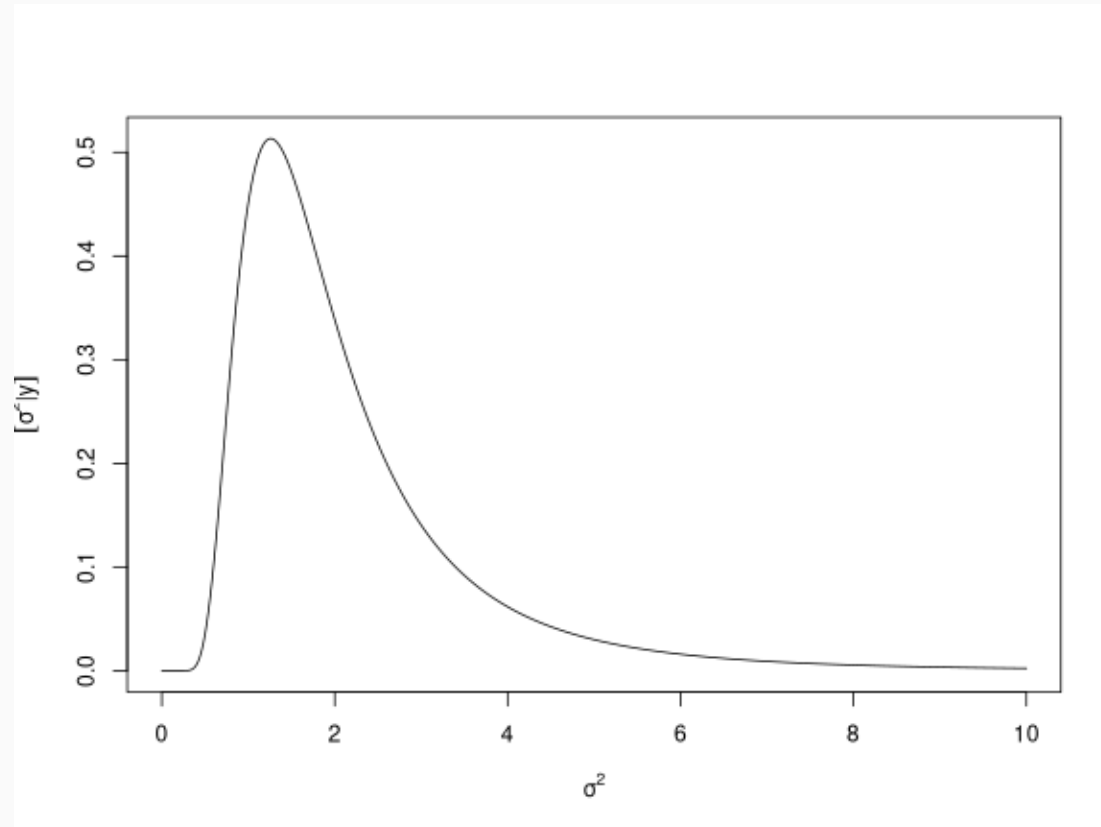
```
y <- c(12.1, 8.7, 11.3, 9.2, 10.5, 9.7, 11.6)
(a.post <- length(y)/2)
# [1] 3.5
(b.post <- 2/sum((y - 10)^2))
# [1] 0.1765225
```

Embora códigos para tal distribuição possam ser obtidos já implementados, vamos definindo uma função da densidade gama-inversa a partir de sua expressão. A seguir usamos a função para obter o gráfico da posteriori obtida aqui.

```
dinvgamma <- function(x, a, b, log = FALSE){
  res <- ifelse(
    x > 0,
    - a * log(b) - log(gamma(a)) - (a+1)*log(x) - 1/(b*x), -Inf)
  if(!log) res <- exp(res)
  return(res)
}
```

## 4. Expressão da posteriori para os dados

```
curve(dinvgamma(x, a = a.post, b = b.post), from = 0, to = 10, n = 501,  
      xlab = expression(sigma^2),  
      ylab = expression(group("[", paste(sigma^2,"|",y), "]")))
```



# 5. Resumos pontuais e intervalares

## Resumos pontuais: média da posterior

Neste caso se tem a expressão analítica, que portanto deve ser utilizada.

- Como em muitos casos pode não ser disponível, ilustra-se também a obtenção por integração numérica e por simulação.
- Expressão analítica

$$E[\sigma^2|y] = \frac{1}{\beta(\alpha - 1)} = 2.27$$

```
(e.post <- 1/(b.post * (a.post - 1)))  
# [1] 2.266
```

- Integração numérica (a partir da definição de esperança de uma v.a.).

$$E[\sigma^2|y] = \int_0^{\infty} \sigma^2 f(\sigma^2|y) d\sigma^2$$

```
Epost <- function(par, ...) par * dinvgamma(par, ..., log = FALSE)  
integrate(Epost, lower = 0, upper = 50, a = a.post, b = b.post)  
# 2.263282 with absolute error < 6.6e-06
```

# 5. Resumos pontuais e intervalares

## Resumos pontuais: média da posterior

- Por simulação

Se  $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$  então  $Y = 1/X \sim \text{IGama}(\alpha, \beta)$ .

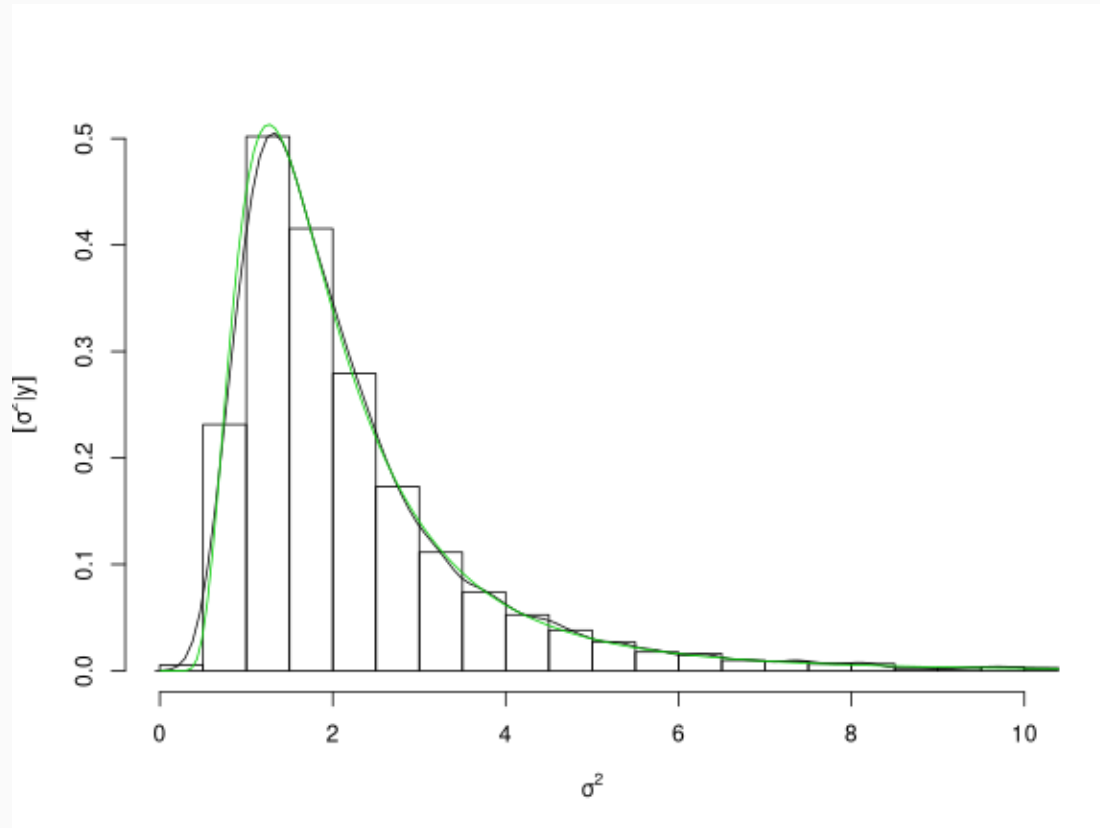
Portanto, para simular de uma distribuição gama inversa basta tomar o inverso de valores simulados de uma distribuição gama com os os mesmos parâmetros.

```
set.seed(123)
sim <- 1/rgamma(10000, shape = a.post, scale = b.post)
hist(sim, prob = TRUE, ylim = c(0,0.5),
     breaks = c(seq(0, 10, by = 0.5), seq(10, 60, by = 2)),
     xlab = expression(sigma^2),
     ylab = expression(group("[", paste(sigma^2,"|",y), "]")),
     main = "", xlim = c(0, 10))
lines(density(sim))
curve(dinvgamma(x, a = a.post, b = b.post), from = 0.01, to = 30,
     add = TRUE, col = 3, n = 501)
```



# 5. Resumos pontuais e intervalares

Resumos pontuais: média da posterior



```
mean(sim)
# [1] 2.280075
```

# 5. Resumos pontuais e intervalares

## Resumos pontuais: moda da posteior

Assim como no caso da média, a expressão analítica da moda é conhecida mas ilustra-se também a obtenção por otimização numérica e por simulação.

- Expressão analítica

$$Mo[\sigma^2|y] = \frac{1}{\beta(\alpha + 1)} = 1.26$$

```
(mo.post <- 1/(b.post * (a.post + 1)))  
# [1] 1.258889
```

- Otimização numérica, maximizando a densidade

```
optimize(dinvgamma, lower = 0, upper = 50, a = a.post, b = b.post,  
         log = FALSE, maximum = TRUE)$maximum  
# [1] 1.258905
```

- Simulação. Utiliza-se aqui um algoritmo simples tomando-se o ponto de máximo de uma suavização da densidade

```
sim.den <- density(sim, n = 1024)  
sim.den$x[which.max(sim.den$y)]  
# [1] 1.32702
```

# 5. Resumos pontuais e intervalares

## Resumos pontuais: mediana da posterior

- Expressão analítica: não disponível
- Otimização numérica: usando inversos dos quantis da distribuição gama

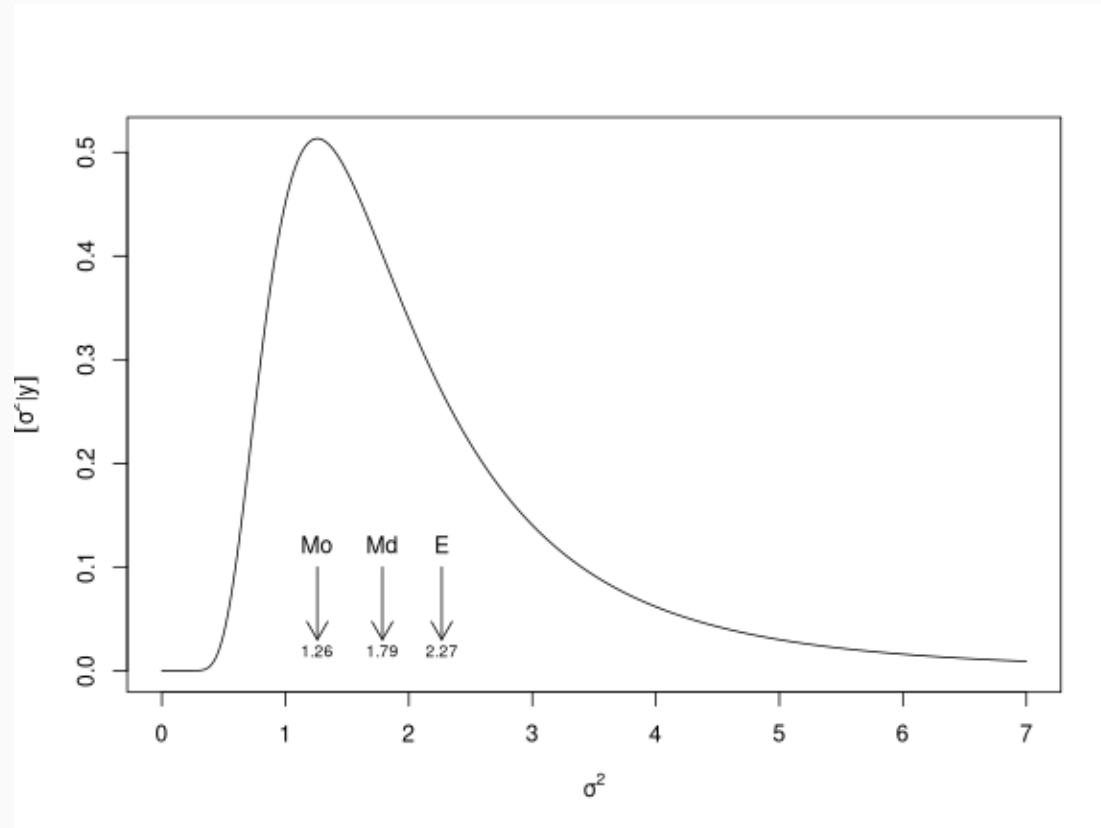
```
(md.post <- 1/qgamma(1 - 0.5, shape = a.post, scale = b.post))  
# [1] 1.78543
```

- Simulação

```
median(sim)  
# [1] 1.793622
```

# 5. Resumos pontuais e intervalares

Resumos pontuais: média, moda e mediana



# 5. Resumos pontuais e intervalares

## Resumos intervalares: intervalos de credibilidade

- Expressão analítica: não disponível
- Por otimização numérica. Podemos definir uma função específica para a gama-inversa:

```
qinvgamma <- function(p, a, b, ...) {  
  1/qgamma(1 - p, shape = a, scale = b, ...)  
}  
(ICq <- qinvgamma(c(0.025, 0.975), a = a.post, b = b.post))  
# [1] 0.7075605 6.7046610
```

- Por simulação

```
quantile(sim, prob = c(0.025, 0.975))  
#      2.5%      97.5%  
# 0.7075484 6.8346235
```

# 5. Resumos pontuais e intervalares

## Resumos intervalares: HPD

- Quando a distribuição posterior é assimétrica, o intervalo de credibilidade nem sempre representa a porção central da distribuição adequadamente
- Por isso, usamos o intervalo HPD (*Highest Posterior Density*), que, por definição, sempre será o menor intervalo possível (central)

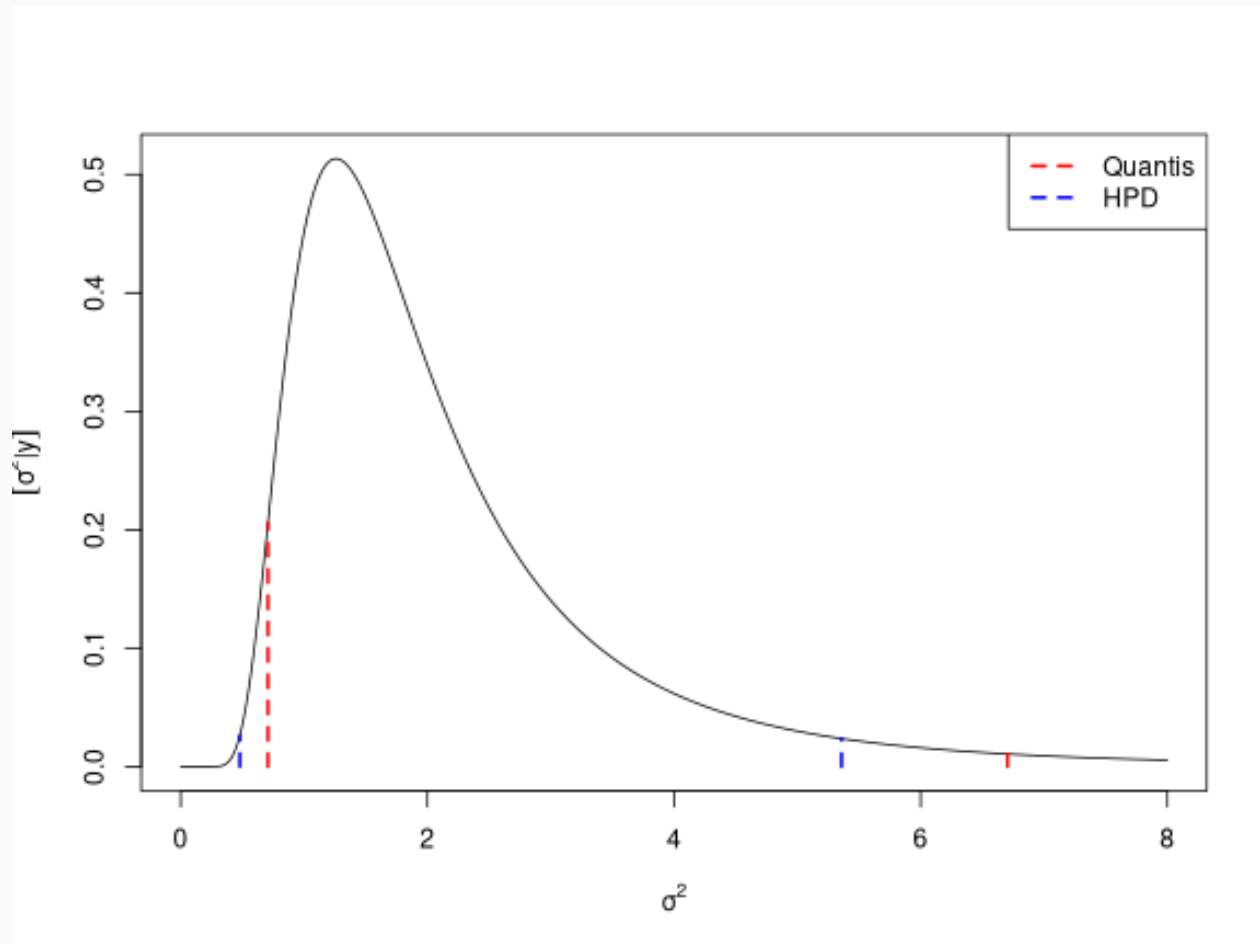
```
library(HDInterval)
(ICHpd <- hdi(sim))
#   lower      upper
# 0.4796374 5.3586471
# attr(,"credMass")
# [1] 0.95
```

Veja a diferença:

```
ICq
# [1] 0.7075605 6.7046610
diff(ICq)
# [1] 5.9971
ICHpd
# [1] 0.4796374 5.3586471
diff(ICHpd)
# [1] 4.87901
```

# 5. Resumos pontuais e intervalares

Resumos intervalares: quantis x HPD



# Gráficos

## Priori, posteriori e verossimilhança

Para incluir o gráfico da **verossimilhança** na mesma escala da priori e posteriori é necessário utilizar a função padronizada (de forma a integrar 1).

Há duas formas que serão ilustradas a seguir:

1. reconhecendo o núcleo de alguma distribuição conhecida (quando possível)
2. integrando explicitamente a verossimilhança (analítica ou numericamente).

Neste exemplo a opção (1) é possível pois, para a verossimilhança, tem-se que:

$$L(\sigma^2|y) \propto \text{IGama}(\alpha = (n/2) - 1, \beta = 2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2)$$



# Gráficos

## Priori, posteriori e verossimilhança

