Probabilidades

Wagner H. Bonat
Elias T. Krainski
Fernando P. Mayer

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

Sumário

Tipos de fenômenos

Fenômenos determinísticos

Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido inúmeras vezes, **em condições semelhantes**, conduz a resultados *essencialmente* idênticos. Ex.:

- Aceleração da gravidade;
- Leis da Física e da Química.

Fenômenos aleatórios

Os experimentos que **repetidos sob as mesmas condições** geram resultados diferentes, são chamados de experimentos aleatórios. Ex.:

- Lançamento de uma moeda;
- Lançamento de um dado;
- Condições climáticas do próximo domingo;
- Taxa de inflação do próximo mês.

Teoria das Probabilidades

- O que é a Teoria das Probabilidades?
  - Ramo da matemática que desenvolve e avalia **modelos** para descrever **fenômenos aleatórios**.
  - É a base teórica para o desenvolvimento das técnicas estatísticas.
- Qual o objetivo da Teoria das Probabilidades?
  - Construir um arcabouço matemático adequado para descrever **fenômenos aleatórios**.
- O que precisamos para começar?
  - Descrever o **conjunto** de resultados possíveis do **fenômeno aleatório** de interesse;
  - Atribuir **pesos** a cada possível resultado, refletindo suas chances de ocorrência.

Definições

- **Espaço amostral**: Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.
  - Pode conter um número finito ou infinito de pontos.
  - Exemplos: {cara, coroa}, {1,2,3,4,5,6}, $\mathbb{R}^+$.
  - Notação Ω.
- **Pontos amostrais**: São os elementos que compõem o Ω.
  - Notação ω.
  - Exemplo: $\omega_1 =$ cara, $\omega_2 =$ coroa.
- **Eventos**: Todo resultado ou <u>subconjunto</u> de resultados de um experimento aleatório.
  - Exemplos: A = "sair cara", B = "sair face par".
  - Em geral são denotados por $A, B, C \ldots$.

Exemplos

- **Experimento:** retirar uma carta de um baralho de 52 cartas.
- **Espaço amostral:** $\Omega = \{\clubsuit A, \clubsuit 2, ..., \heartsuit A, ..., \spadesuit A, ..., \diamondsuit J, \diamondsuit Q, \diamondsuit K\}$.
- **Pontos amostrais:** $\omega_1 = \clubsuit A$, $\omega_2 = \clubsuit 2$, ..., $\omega_{52} = \diamondsuit K$.
- **Eventos:** A = "sair um ás", B = "sair uma letra", C = "sair carta de $\clubsuit$".

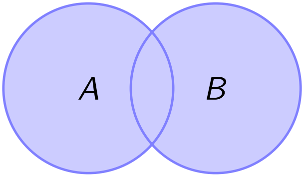
- **Experimento:** pesar um fruto ao acaso.
- **Espaço amostral:** $\Omega = \mathbb{R}^+$.
- **Pontos amostrais:** espaço amostral é infinito.
- **Eventos:** A = "peso menor que 50g", B = $\{x : x \geq 100\text{g}\}$.

Operações com eventos

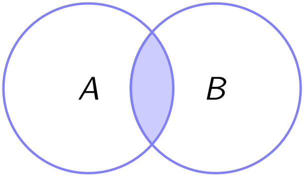
Usamos a **Teoria dos conjuntos** para definir operações com eventos.

- **Conjunto vazio** é o conjunto sem elementos, denotado por $\emptyset$.
- **União** é o evento que consiste da união de **todos** os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denotamos a união do evento A com B por $A \cup B$. $A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$.
- **Interseção** é o evento composto pelos pontos amostrais **comuns** aos eventos que a compõem. Denotamos a interseção de A com B por $A \cap B$. $A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$.

$A \cup B$

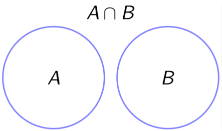


$A \cap B$

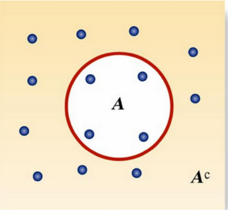


Tipos de eventos

- **Disjuntos** (mutuamente exclusivos) são eventos que possuem interseção nula, ou seja, $A \cap B = \{\emptyset\}$.



- **Complementares** são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja, $A \cup A^c = \Omega$.



Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os eventos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C =$ face par, $D =$ face primo.

- Uniões
- $A \cup B =$
- $A \cup C =$
- $A \cup D =$
- Interseções
- $A \cap B =$
- $A \cap C =$
- $A \cap D =$
- Complementos
- $A^c =$
- $B^c =$
- $D^c =$

Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os eventos: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C =$ face par, $D =$ face primo.

- Uniões
- $A \cup B = \{1,2,3,4\}\text{ou}\{1,2,3\} = \{1,2,3,4\}$
- $A \cup C = \{1,2,3,4\}\text{ou}\{2,4,6\} = \{1,2,3,4,6\}$
- $A \cup D = \{1,2,3,4\}\text{ou}\{2,3,5\} = \{1,2,3,4,5\}$
- Interseções
- $A \cap B = \{1,2,3,4\}\text{ou}\{1,2,3\} = \{1,2,3\}$
- $A \cap C = \{1,2,3,4\}\text{ou}\{2,4,6\} = \{2,4\}$
- $A \cap D = \{1,2,3,4\}\text{ou}\{2,3,5\} = \{2,3\}$
- Complementos
- $A^c = \{5,6\}$
- $B^c = \{\omega : \omega > 3\}$
- $D^c = \{1,4,6\}$

Sumário

Definição axiomática de probabilidade

Probabilidade é uma função $P(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, de tal forma que

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \Omega;$
2. $P(\Omega) = 1;$
3. $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, com os A_j's disjuntos.

A pergunta que surge é então: como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

Definição de probabilidade

Existem duas maneiras principais de atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral:

1. (**Clássica**) baseia-se nas características teóricas da realização do fenômeno.
   - Considerando o lançamento de um dado, temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   - Admitindo que o dado é honesto, podemos assumir que $P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = 1/6$
2. (**Frequentista**) baseia-se nas frequências (relativas) de ocorrência do fenômeno.
   - Determinar a probabilidade de ocorrência de cada face de um dado.
   - Sem fazer nenhuma suposição inicial, podemos usar as **frequências relativas** de sucessivas ocorrências.

Definição frequentista

Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório n vezes, e contar quantas vezes o evento A ocorre, $n(A)$.

Dessa forma a frequência relativa de A nas n repetições será

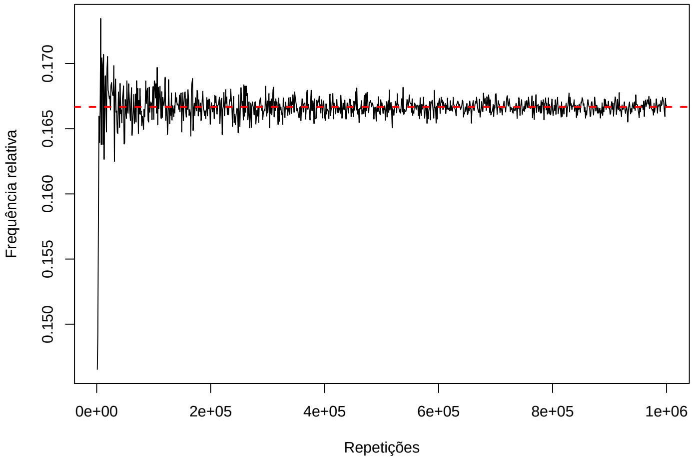
$$f_{A,n} = \frac{n(A)}{n}.$$

Para $n \to \infty$ repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de A tende para uma constante $P(A)$, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A).$$

Exemplo: Se um dado fosse lançado n vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

Definição frequentista



Definição frequentista

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) \approx 0,1667.$$

As probabilidades calculadas baseadas em frequências relativas, são **estimativas** da verdadeira probabilidade.

À medida que o número de repetições vai aumentando, as **frequências relativas** se estabilizam em um número que chamamos de **probabilidade**.

Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações.

Exemplo

Considerando os dados da variável `Idade` da aula anterior e considerando que os nossos dados são **populacionais**, tem-se

- O espaço amostral é $\Omega = \{17, 18, \ldots, 25\}$.
- Se um aluno é escolhido ao acaso, definimos a probabilidade dele ter certa idade pela frequência relativa

	n_i	f_i	f_{ac}
17	9	0.18	0.18
18	22	0.44	0.62
19	7	0.14	0.76
20	4	0.08	0.84
21	3	0.06	0.90
22	0	0.00	0.90
23	2	0.04	0.94
24	1	0.02	0.96
25	2	0.04	1.00
Sum	50	1.00	

$$P(17) = 0,18; \ldots ; P(25) = 0,04$$

Exemplo

Considerando os dados das variáveis `Sexo` e `Turma`

	F	M	Sum
A	21	5	26
B	16	8	24
Sum	37	13	50

Podemos extrair as seguintes probabilidades

$$P(F) = \frac{37}{50} = 0,74; P(M) = \frac{13}{50} = 0,26$$
$$P(A) = \frac{26}{50} = 0,52; P(B) = \frac{24}{50} = 0,48.$$

Qual seria a probabilidade de escolhermos ao acaso um estudante do sexo feminino ou alguém da Turma B?

Exemplo

Queremos então $P(F \cup B)$

$$
\begin{aligned}
P(F \cup B) &= P(F) + P(B) \\
&= 0,74 + 0,48 \\
&= 1,22
\end{aligned}
$$

o que não é possível pois a soma é superior a 1.

Não é difícil ver que estamos somando alguns indivíduos 2 vezes, pois os estudantes do sexo feminino e da turma B, ou seja, o evento $F \cap B$ está incluído no evento F e no evento B.

Exemplo

Logo, precisamos subtrair $P(F \cap B)$ para obter a probabilidade correta.

Neste caso, pela tabela, vemos que a interseção $F \cap B$ resulta na probabilidade

$$P(F \cap B) = \frac{16}{50} = 0,32.$$

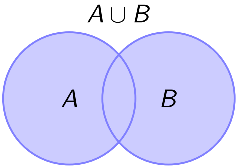
E o resultado correto para $P(F \cup B)$ é

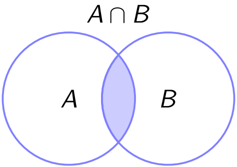
$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) - P(F \cap B) \\ &= 0,74 + 0,48 - 0,32 \\ &= 0,9. \end{aligned}$$

Regra da adição de probabilidades

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer, A e B, é dada pela **regra da adição de probabilidades**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



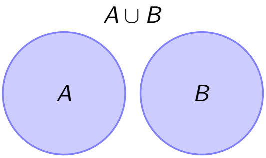


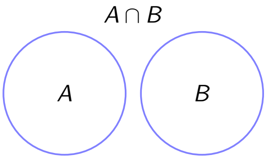
Regra da adição de probabilidades

Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos A e B forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

pois, neste caso, $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0.$





Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, temos que, para qualquer evento A,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Verifique através de $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$.

Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, temos que, para qualquer evento A,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Verifique através de $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$.

$$\begin{aligned}
P(A \cup A^c) &= 1. && \text{Pela regra da adição, tem-se} \\
P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) &= 1. && \text{interseção é nula, então} \\
P(A) + P(A^c) &= 1. && \text{e portanto} \\
P(A) &= 1 - P(A^c).
\end{aligned}$$

Sumário

Probabilidade condicional

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas.

A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Nestes casos, dizemos que **ganhamos informação**, e podemos *recalcular* as probabilidades de interesse.

Estas probabilidades *recalculadas* recebem o nome de **probabilidades condicionais**.

Definição

- Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A ocorrer, dado que ocorreu B é representado por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{para} \quad P(B) > 0.$$

- Caso $P(B) = 0$, definimos $P(A|B) = P(A)$.

Probabilidade condicional

Considere o seguinte exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?
- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saido face 4 com essa "nova" informação?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(\Omega) = 6$.

$A = \text{face 4} = \{4\}$, $n(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$.

$B = \text{face par} = \{2, 4, 6\}$, $n(B) = 3 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$.

$C = \text{face 4, dado que ocorreu face par} = \{4\}$, $n(C) = \frac{1}{3}$.

Probabilidade condicional

Usando a definição formal:

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{1/6}{3/6} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Regra do produto

A regra do produto é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Essa expressão permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em sequência, onde a ocorrência da *segunda* etapa **depende** (ou não) da ocorrência da *primeira* etapa.

Regra do produto

Qual a probabilidade de se obter dois ases em seguida, quando se extraem duas cartas de um baralho comum de 52 cartas, se:

1. A primeira carta extraída **não** é reposta antes da extração da segunda carta.
2. A primeira carta é reposta no baralho antes da extração da segunda carta.

Eventos independentes

Vimos que para probabilidades condicionais, $P(A|B)$, saber que B ocorreu nos dá uma informação "extra" sobre a ocorrência de A.

Porém, existem algumas situações nas quais saber que o evento B ocorreu, não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de A.

Nestes casos, podemos dizer que os eventos A e B são **independentes**.

Eventos independentes

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e também que} \quad P(B|A) = P(B).$$

Com isso, e a regra do produto, temos que

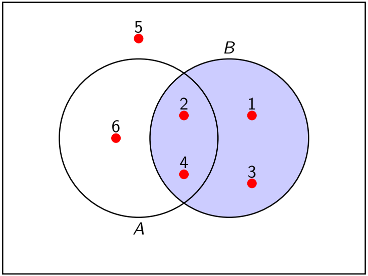
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A).$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B).$$

Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos:

$A =$ "resultado é um número par".
$B =$ "resultado é um número menor ou igual a 4".

Os eventos A e B são independentes?



Exemplo

Pela definição intuitiva:

$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2.$

$P(B) = 2/3, \quad P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3.$

Portanto: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

Pela definição formal:

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3.$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3$, assim $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Portanto, os eventos A e B são independentes. Saber que A ocorreu não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.

Exemplo 2.4 (livro)

Uma empresa produz peças em duas máquinas I e II, que podem apresentar desajustes com probabilidade $0,05$ e $0,10$, respectivamente.

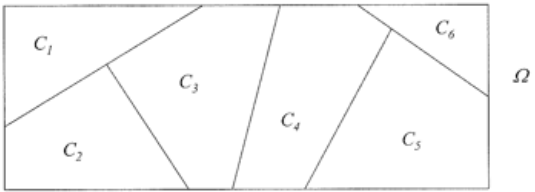
No início do dia de operação um teste é realizado e, caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia passando por revisão técnica.

Para cumprir o nível mínimo de produção pelo menos uma das máquinas deve operar. Você diria que a empresa corre o risco de não cumprir com suas metas de produção?

Partição do espaço amostral

Dizemos que os eventos $C_1, C_2, ..., C_k$ formam uma **partição** do espaço amostral, se eles não tem interseção entre si, e se sua união é igual ao espaço amostral. Isto é,

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Omega.$$



Exemplo 2.5 (livro)

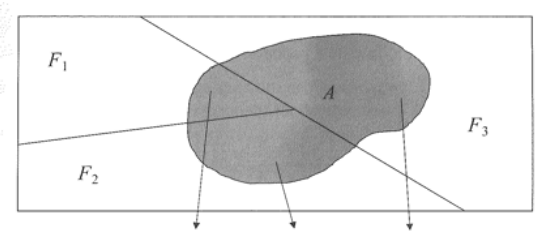
Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma outra fazenda F_2 e 50% de F_3.

Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, qual a probabilidade do leite estar adulterado?

Exemplo 2.5 (livro)

Seja A o evento "o leite está adulterado", podemos defini-lo conforme a figura abaixo.



$$A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) \cup (A \cap F_3)$$

Calcule $P(A)$.

Teorema de Bayes

Podemos estar interessados também na probabilidade de uma amostra adulterada ter sido obtida a partir da fazenda F_1, ou seja, $P(F_1|A)$.

Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formem uma partição de Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, se conheçam as probabilidades $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Então, para qualquer j,

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j)P(A|C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(C_i)P(A|C_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Exemplo 2.6 (livro)

Usando o exemplo anterior, podemos agora calcular a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda F_1.

$$\begin{aligned} P(F_1|A) &= \frac{P(F_1)P(A|F_1)}{P(F_1)P(A|F_1) + P(F_2)P(A|F_2) + P(F_2)P(A|F_2)} \\ &= \frac{0,2 \times 0,2}{0,2 \times 0,2 + 0,3 \times 0,05 + 0,5 \times 0,02} \\ &= 0,615. \end{aligned}$$

De maneira similar, podemos obter $P(F_2|A)$ e $P(F_3|A)$.

Exercícios recomendados

- Seção 2.1 Ex. $1, 2, 3, 4$ e 5.
- Seção 2.2 Ex. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7.
- Seção 2.3 Ex. $1, 3, 8, 9, 11, 13, 15$ e 19.